4. Tutorium

Samstag, 13. November 2021 14:44

1.) Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation

a.) Erwartungswerte von Observablen (Mittelwert)

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$ woher kommt das?

- klassischer Erwartungswert: $\langle \hat{A} \rangle_\psi = \lim_{N\to\infty} \sum_i a_i \underbrace{\frac{N(a_i)}{N}}_{\text{Anteil bei N-Messungen}}$ (Messwert: a_i)

$$= \sum_i a_i \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{N(a_i)}{N}}_{W(a_i)}$$

$W(a_i)$ ← Wahrscheinlichkeit a_i zu messen

- Erinnerung: 3 Postulat

$$W(a_i) = \frac{\langle \psi | P_{\alpha_i} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle_\psi = \sum_i a_i \frac{\langle \psi | \overset{\text{Projektion}}{P_{\alpha_i}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$= \frac{\langle \psi | \sum_i a_i P_{\alpha_i} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \qquad \square$$

Beispiel: Ortsdarstellung $\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi | x \rangle \langle x | \hat{A} \psi \rangle \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \underbrace{\hat{A}_x}_{\text{Ortsdarstellung von } \hat{A}} \psi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_x |\psi(x)|^2 \, dx$$

b.) Standardabweichung

- Beschreibung der Streuung der gemessenen Werte

$$\Delta A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$ ← quadratische Abweichung vom Mittelwert

$$= \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle$$
$$= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2$$
$$= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}}$$

c.) Unbestimmtheitsrelation

- Wir betrachten $|\varphi\rangle = (A + \lambda i B)|\psi\rangle$ $\quad A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (hermitesch) $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
- betrachte das positiv definite Skalarprodukt

$$0 \le \langle \varphi | \varphi \rangle = \langle \psi | (A - \lambda i B)(A + \lambda i B) | \psi \rangle$$
$$= \langle \psi | \hat{A}^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda i [A, B] | \psi \rangle$$

$$0 \leq \langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\Psi|(A-\lambda i B)(A+\lambda i B)|\Psi\rangle$$
$$= \langle\Psi|\hat{A}^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda i [A,B]|\Psi\rangle$$
$$= \langle A^2\rangle + \lambda^2\langle B^2\rangle + \lambda i \langle[A,B]\rangle$$

· Quadratische Gleichung in λ: Ungleichung ist dann erfüllt wenn die Diskriminante ≤ 0 ist

$$\left[a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right] \quad \Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0$$

$$\Rightarrow -\langle[A,B]\rangle^2 - 4\langle B^2\rangle\langle A^2\rangle \leq 0$$
$$\langle B^2\rangle\langle A^2\rangle \geq -\frac{1}{4}\langle[A,B]\rangle^2$$

Transformiere zur Abweichung der Mittelwerte $B' = B - \langle B\rangle$, $A' = A - \langle A\rangle$

$$[A',B'] = [A-\langle A\rangle, B-\langle B\rangle]$$
$$= [A,B] \underbrace{- [\langle A\rangle, B] - [A,\langle B\rangle] - [\langle A\rangle,\langle B\rangle]}_{=0}$$
$$= [A,B]$$

analog zu obiger Herleitung gilt dann:

$$\langle B'^2\rangle\langle A'^2\rangle = \Delta B^2 \Delta A^2 \geq -\frac{1}{4}\langle[A,B]\rangle^2 \quad \Big|\sqrt{\dots}$$

$$\boxed{\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|} \quad \text{Unschärferelation}$$

Beispiele:

$[\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar \qquad \Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}|\langle\underbrace{[\hat{x},\hat{p}_x]}_{i\hbar}\rangle| = \frac{1}{2}|i\hbar| = \frac{\hbar}{2}$

$\hat{T} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} \qquad [\hat{x},\hat{p}_x^2] = \hat{p}_x[\hat{x},\hat{p}_x] + [\hat{x},\hat{p}_x]\hat{p}_x = 2i\hbar\hat{p}$

$\Rightarrow \Delta\hat{x}\Delta\hat{T} \geq \frac{1}{4m}|\langle[\hat{x},\hat{p}_x^2]\rangle| = \frac{\hbar}{2m}|\langle\hat{p}\rangle|$ abhängig vom Impuls

Anwendungen

· Zeit-Energie Unschärfe $\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$

↳ natürliche Linienbreite von Spektrallinien
$\Delta t \sim \tau$ - Lebensdauer

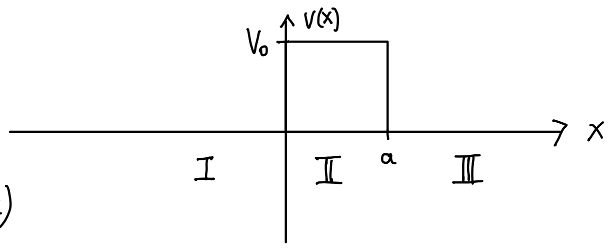
· Warum fällt das e^- nicht in den Atomkern?
$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ Atomkern naheu punktförmig $\Rightarrow \Delta x \to 0$
$\Delta p \to \infty$ unendlich Energie

· Vakuumfluktuation durch $\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$
↳ Casimir Effekt
↳ virtuelle Teilchen

· Abschätzung der Breite von Tunnelbarrieren $\Delta p = \sqrt{2mV}$ V- Potential, $V \stackrel{!}{=} \frac{p^2}{2m}$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2mV}}$$

2 Der Potentialwall



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t)}_{\text{zeitunabhängiger Hamilton-Operator}}$$

- einfacher Ansatz für die zeitliche Entwicklung der ebenen Welle

$$\Psi(x,t) = e^{-i\omega t}\,\Psi(x,0) \quad \Rightarrow \text{LHS}: \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \underbrace{\hbar\omega}_{E}\,\Psi(x,t) = E\,\Psi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad E\,\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\,\Psi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = \underbrace{-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)}_{-k^2}\Psi(x,t)$$

Wähle als Lösungsansatz: $\Psi(x,t) = \underbrace{A\,e^{i(kx-\omega t)}}_{\rightarrow \text{ Welle}} + \underbrace{A'\,e^{i(-kx-\omega t)}}_{\leftarrow \text{ Welle}}$

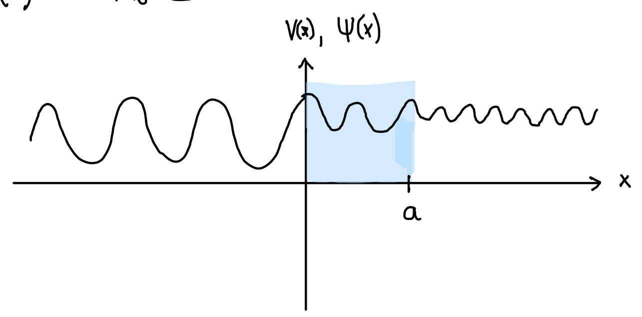
es gilt nun
$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad \text{I} \\ V_0 & 0 \le x \le a \quad \text{II} \\ 0 & x > a \quad \text{III} \end{cases}$$

In den drei Raumbereichen gelte nun:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= A_1\,e^{ik_1x} + A_1'\,e^{-ik_1x} \qquad & k_1 = k_3 = \sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}E} \\ \Psi_2(x) &= A_2\,e^{ik_2x} + A_2'\,e^{-ik_2x} \\ \Psi_3(x) &= A_3\,e^{ik_3x} + A_3'\,e^{-ik_3x} \qquad & k_2 = \sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} \end{aligned}$$

Annahme: Teilchen kommt von $-\infty$ in positive Richtung: $A_3' = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= A_1\,e^{ik_1x} + A_1'\,e^{-ik_1x} \\ \Psi_2(x) &= A_2\,e^{ik_2x} + A_2'\,e^{-ik_2x} \\ \Psi_3(x) &= A_3\,e^{ik_1x} \end{aligned}$$



Fordere nun Stetigkeit an den Grenzflächen
- Wellenfunktion
- Ableitung der Wellenfunktion

$$\Psi_1(0) \overset{!}{=} \Psi_2(0) \Rightarrow A_1 + A_1' = A_2 + A_2' \qquad (1)$$

$$\Psi_1'(0) \overset{!}{=} \Psi_2'(0) \Rightarrow k_1(A_1 - A_1') = k_2(A_2 - A_2') \qquad (2)$$

$$\psi_2(a) \overset{!}{=} \psi_3(a) \Rightarrow A_2 e^{ik_2 a} + A_2' e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} \qquad (3)$$
$$\psi_2'(a) \overset{!}{=} \psi_3'(a) \Rightarrow \left(A_2 e^{ik_2 a} - A_2' e^{-ik_2 a}\right) k_2 = k_1 A_3 e^{ik_1 a} \qquad (4)$$

$$(1) + \frac{1}{k_1}(2) \;:\; 2A_1 = A_2 + A_2' + \frac{k_2}{k_1}\left(A_2 - A_2'\right)$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) A_2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right) A_2' \qquad (5)$$
$$(1) - \frac{1}{k_2}(3) \;:\; A_1' = \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right) A_2 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) A_2' \qquad (6)$$

$$(3) + \frac{1}{k_2}(4) \;:\; 2 A_2 e^{ik_2 a} = \left(1+\frac{k_1}{k_2}\right) e^{ik_1 a} A_3$$
$$\Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right) e^{i(k_1-k_2)a} A_3 \qquad (7)$$
$$(3) - \frac{1}{k_2}(4) \;:\; \Rightarrow A_2' = \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right) e^{i(k_1+k_2)a} A_3 \qquad (8)$$

Drücke nun A_1 und A_1' in Abhängigkeit von A_3 aus

$$(5) + (7),(8) \Rightarrow A_1 = \left(\frac{1}{4} \underbrace{\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)}_{2+\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}} e^{i(k_1-k_2)a} + \frac{1}{4} \underbrace{\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)}_{2-\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}} e^{i(k_1+k_2)a}\right) A_3$$
$$= \left(\frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{ik_2 a} + e^{-ik_2 a}\right)}_{\cos(k_2 a)} - \frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2}\,\frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{ik_2 a} - e^{-ik_2 a}\right)}_{i\sin(k_2 a)}\right) e^{ik_1 a} A_3$$

$$\boxed{A_1 = \left(\cos(k_2 a) - \frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2}\, i \sin(k_2 a)\right) e^{ik_2 a} A_3}$$

$$(6) + (7),(8) \quad A_1' = \left(\frac{1}{4} \underbrace{\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)}_{\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1k_2}} e^{i(k_1-k_2)a} + \frac{1}{4} \underbrace{\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)}_{\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}} e^{i(k_1+k_2)a}\right) A_3$$
$$= \left(\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}\,\frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{ik_2 a} - e^{-ik_2 a}\right)}_{i\sin(k_2 a)}\right) e^{ik_1 a} A_3$$
$$= \frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}\, i \sin(k_2 a)\, e^{ik_1 a} A_3$$

Damit können wir die Transmissionswahrscheinlichkeit berechnen, dass das Teilchen die Barriere durchquert.

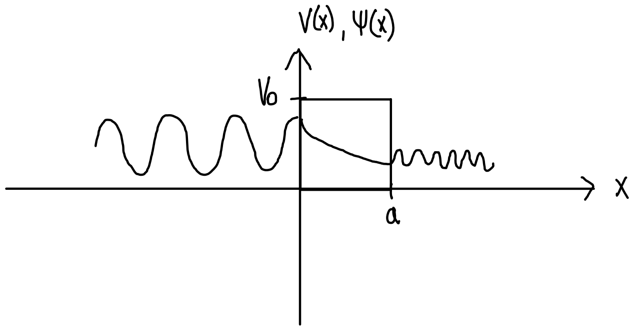
$$T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{\left|e^{-ik_2 a}\right|^2 = 1}{\left|\cos(k_2 a) - \frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2}\, i \sin(k_2 a)\right|^2} = \frac{1}{\underbrace{\cos^2(k_2 a)}_{1} + \underbrace{\frac{(k_1^2+k_2^2)^2}{4k_1^2k_2^2}}_{[(\ldots)+1-1]} \sin^2(k_2 a)}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{(k_1^2+k_2^2)^2 - 4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2} \sin^2(k_2 a)}$$
$$= \frac{4\left|k_1^2k_2^2\right|}{4\left|k_1^2k_2^2\right| + (k_1^2-k_2^2)^2 \sin^2(k_2 a)}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$
$$k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

$$\boxed{T = \frac{4E\,|E-V_0|}{4E\,|E-V_0| + V_0^2 \sin^2\left(\sqrt{2m(E-V_0)}\,\frac{a}{\hbar}\right)}}$$

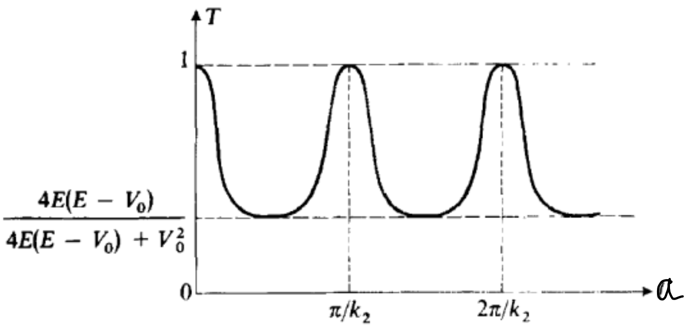
Betrachte den Spezialfall $E < V_0$: $\quad 2m(E-V_0) < 0 \quad \sin\left(\sqrt{2m(E-V_0)}\,\frac{a}{\hbar}\right) = \sinh\left(\sqrt{2m(V_0-E)}\,\frac{a}{\hbar}\right)$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E) + V_0^2 \sinh^2\left(\sqrt{2m(V_0-E)}\,\frac{a}{\hbar}\right)}$$



Quantenmechanischer Tunneleffekt

Spezialfall $E > V_0$:



Transmission abhängig von der Breite
→ Oszillationen

maximal für $a = \pi n \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V_0)}} \qquad n \in \mathbb{N}$